

< 補足 1 >

レーザー測距器を
使った

MacArthur-Horn法による葉量垂直分布の推定 のウラ

参考文献（主なもの）

MacArthur & MacArthur (1961) Ecology 42, 594-598.

MacArthur & Horn (1969) Ecology 50, 802-804.

Aber (1979) Ecology 60, 18-23.

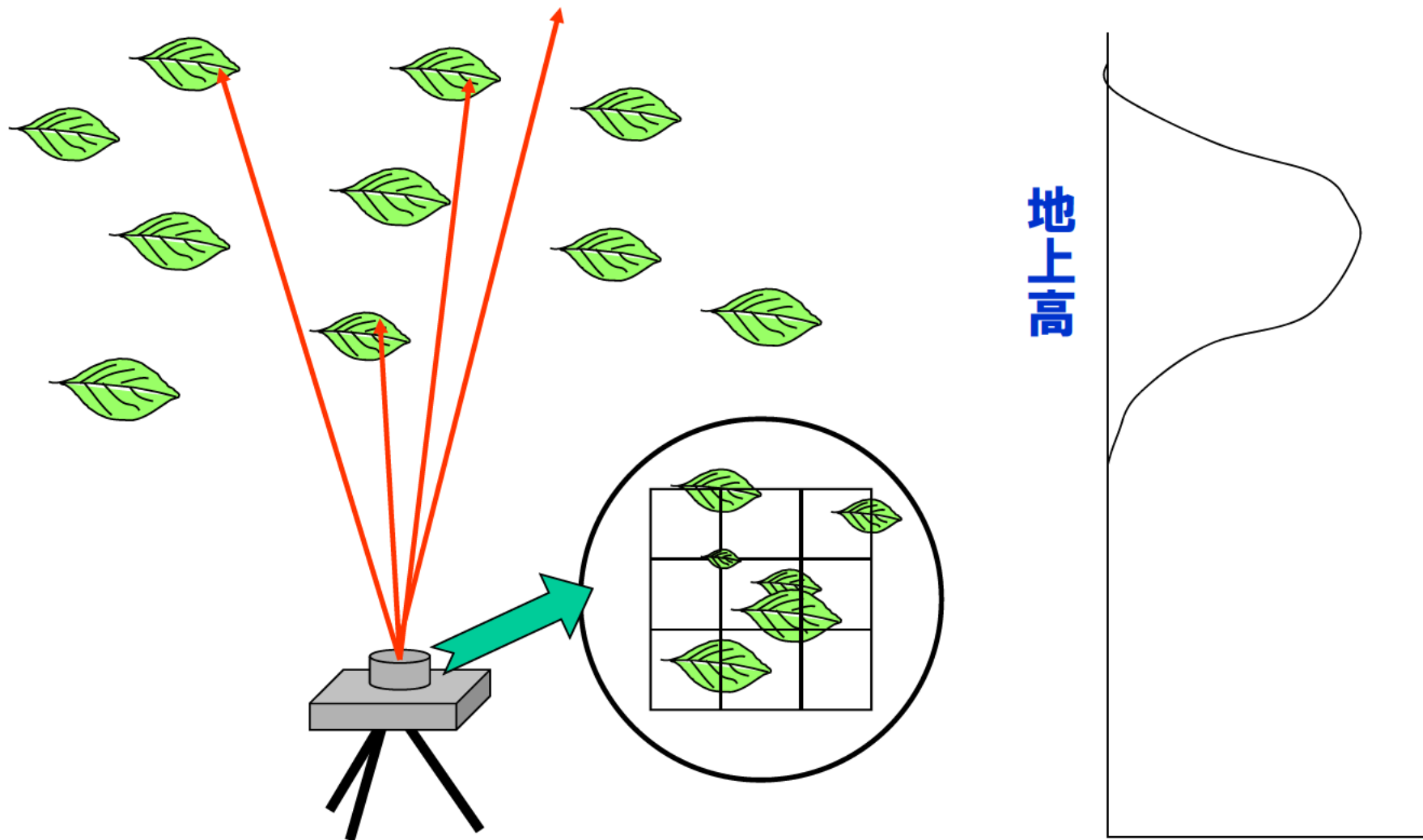
McIntyre, Scholl & Sigmon (1990) Forest Science 36, 381-393.

Fukushima, Hiura & Tanabe (1998) Agric. For. Meteor. 92, 203-210.

Parker, Harding & Berger (2004) J. Appl. Ecol 41, 755-767.

Sumida et al. (2009) Silva Fennica 43, 799-816

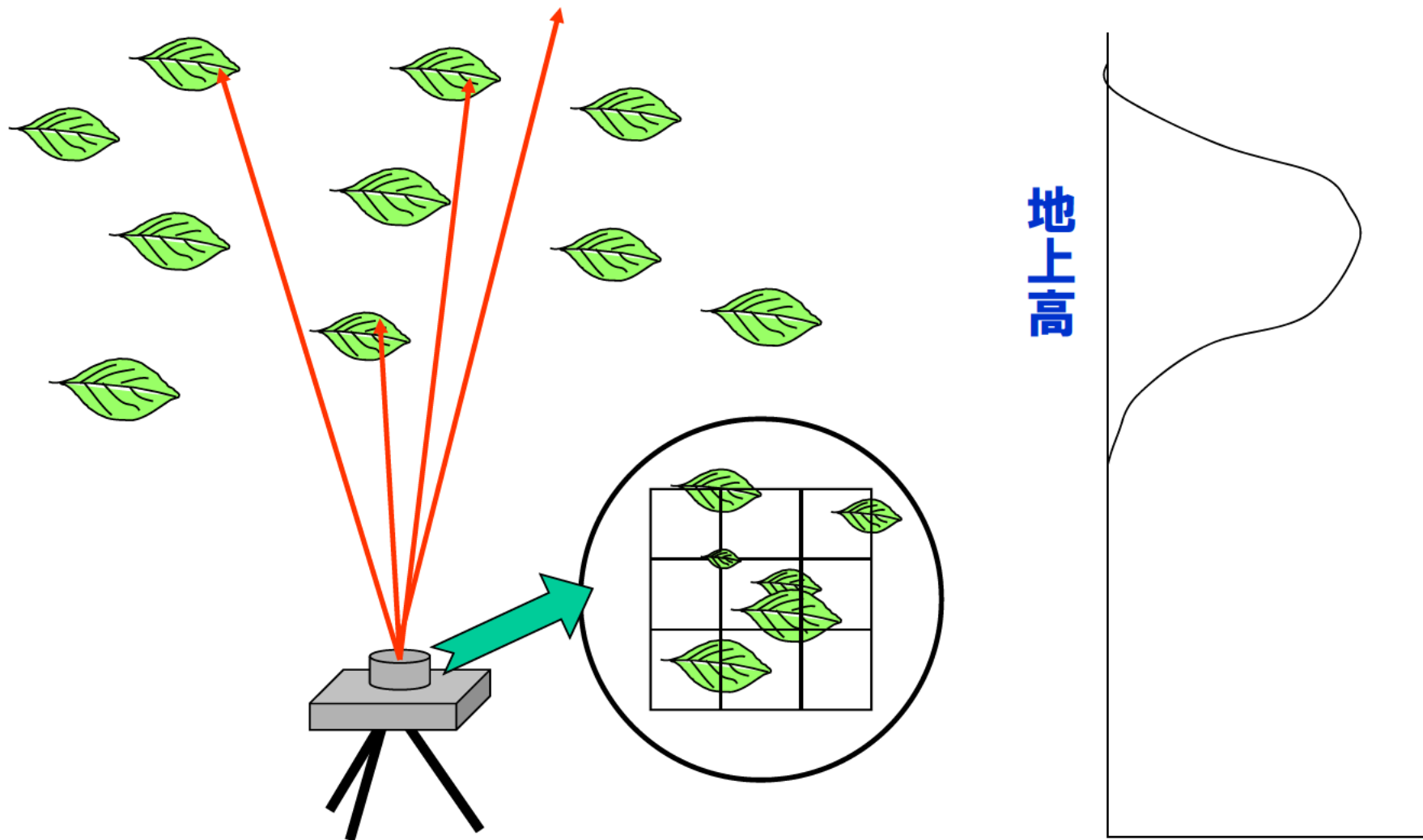
minor updated 22 Apr, 2012



MacArthur-Horn法の概要

葉の空間密度

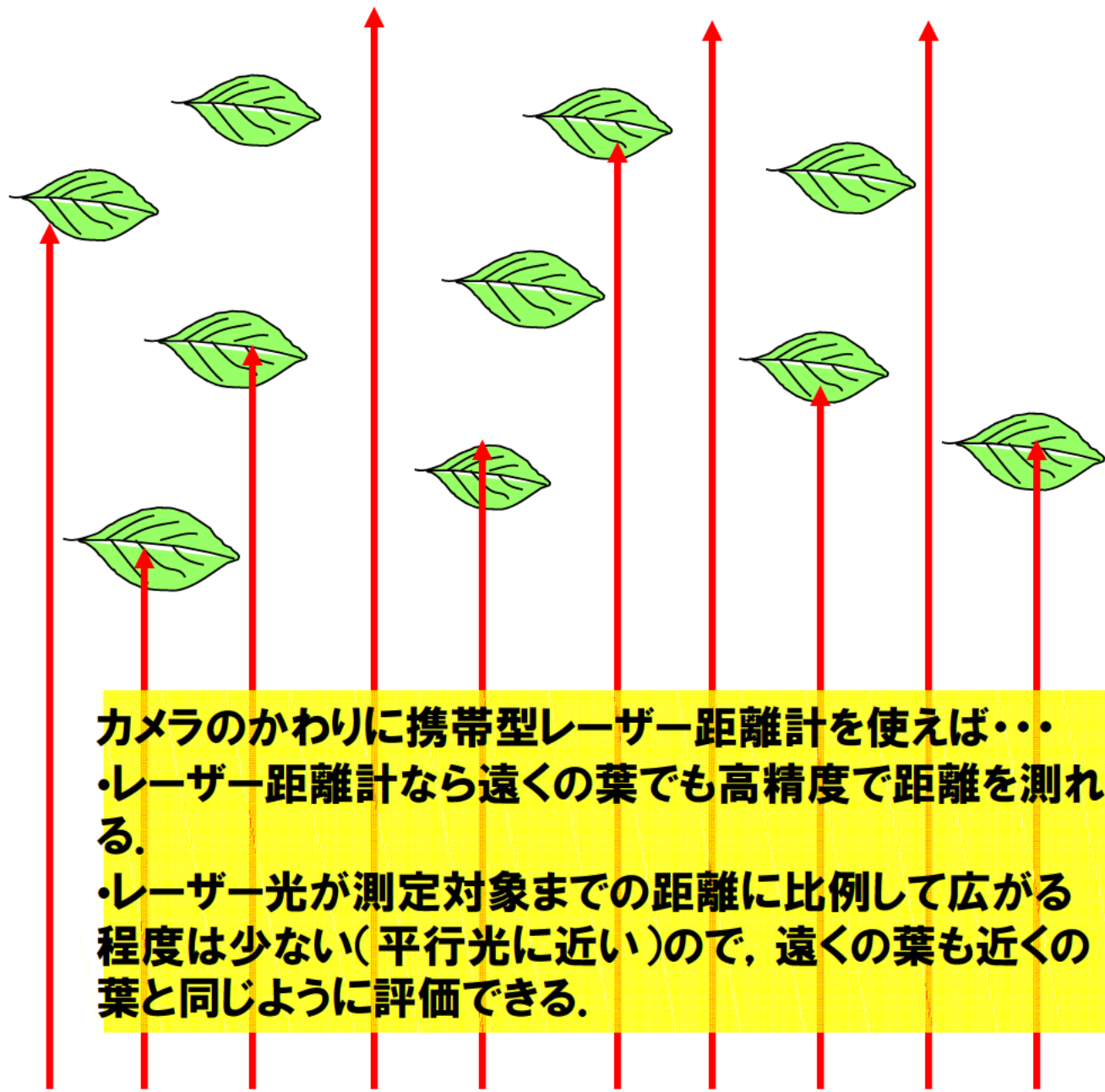
カメラのレンズに格子を切っておき、ランダムに選んだ林床の1地点で、真上を見て格子の交点上にある（最も近い）葉までの距離をカメラのフォーカシングで読み取る。このデータから、葉の垂直分布を理論的に推定する。=>よくないことがある



よくないこと：

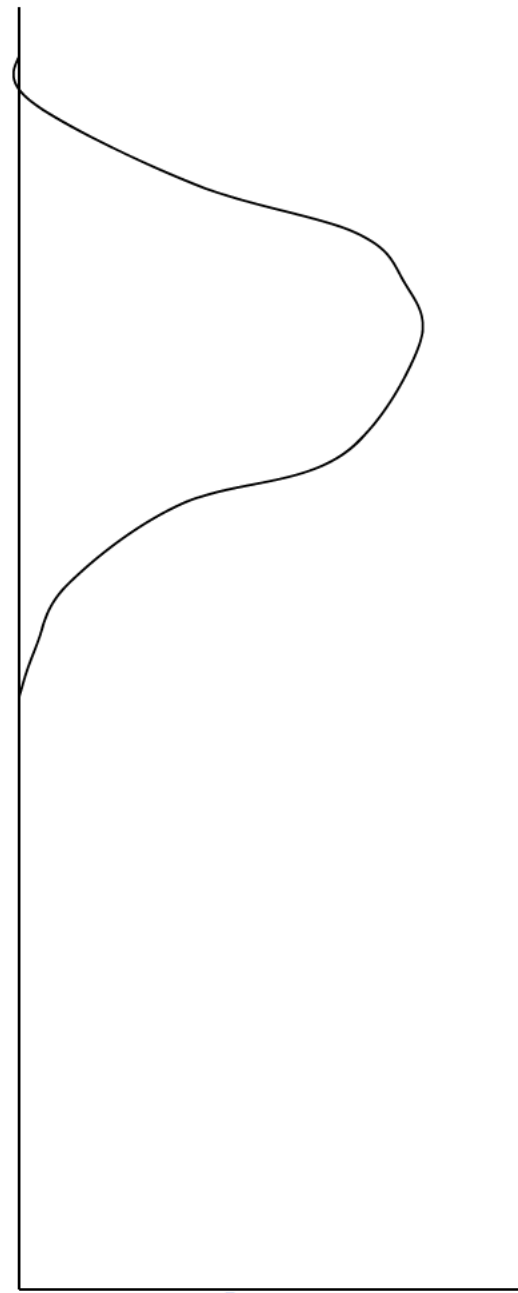
- カメラのフォーカシングで距離を測るので、遠くの葉ほど距離測定精度が甘くなる
- 観測者から近い葉ほど大きく見えるので、検出されやすい

葉の空間密度



カメラのかわりに携帯型レーザー距離計を使えば・・・

- ・レーザー距離計なら遠くの葉でも高精度で距離を測れる。
- ・レーザー光が測定対象までの距離に比例して広がる程度は少ない(平行光に近い)ので、遠くの葉も近くの葉と同じように評価できる。



葉の空間密度

MacArthur & Horn (1969)論文の「密度垂直分布」の導出

$D(h)$ ≡ 高さ $h(m)$ における葉の(空間)密度 (原文では"density")

$\phi(h)$ ≡ h の高さまで1枚も葉がない確率.

$D(h) dh$ ≡ (h から $h+dh$ までの) dh の間に葉が1枚ある確率 ("probability of a leaf in dh ").

∴ $1 - D(h) dh =$ (h から $h+dh$ までの) dh の間に葉がない確率.

∴ h の高さまで1枚も葉がなく、さらに $h+dh$ までの間にも葉がない確率 $\phi(h + dh)$ は

$$\phi(h + dh) = \phi(h) (1 - D(h) dh).$$

これを变形して

$$[\phi(h + dh) - \phi(h)] / dh = - D(h) \phi(h).$$

$$\therefore [\phi(h + dh) - \phi(h)] / dh \cdot [1 / \phi(h)] = - D(h).$$

$dh \rightarrow 0$ のとき上式左辺の左側(青字)は微分記号に変わるので、 $D(h)$ について解くと

$$D(h) = - [1 / \phi(h)] d\phi(h) / dh$$

$$\therefore D(h) = -d\{\ln(\phi(h))\} / dh.$$

ある地上高 h_1 から h_2 ($h_1 < h_2$) までの層に含まれる葉数 ($dh = h_2 - h_1$ のとき $D(h) dh$ に相当)は

$$\int_{h_1}^{h_2} D(h) dh = - \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{\phi(h)} d\phi(h)$$

$$= - \int_{h_1}^{h_2} d[\ln(\phi(h))] = \ln\{\phi(h_1) / \phi(h_2)\}.$$

$$= \ln\{\phi(h_1) / \phi(h_2)\}.$$

$$= \ln(h_1\text{までに葉のない確率} / h_2\text{までに葉のない確率})$$

ややこしいことを抜きにしてまとめると・・・

ある地上高 h_i から h_{i+1} ($h_i < h_{i+1}$) までの層に含まれる葉数 $\equiv F$

・・・のとき、 F は次式で計算される

$$F = \ln \left(h_i \text{までに葉のない確率} / h_{i+1} \text{までに葉のない確率} \right)$$

$$= \ln \left\{ \left(h_i \text{までに葉にコンタクトしなかった測定数} \right) / \left(h_{i+1} \text{までに葉にコンタクトしなかった測定数} \right) \right\}$$

$$= \ln \left\{ \left(h_i \text{の平面を通過したレーザーの数 } N_i \right) / \left(h_{i+1} \text{の平面を通過したレーザーの数 } N_{i+1} \right) \right\}$$

すなわち

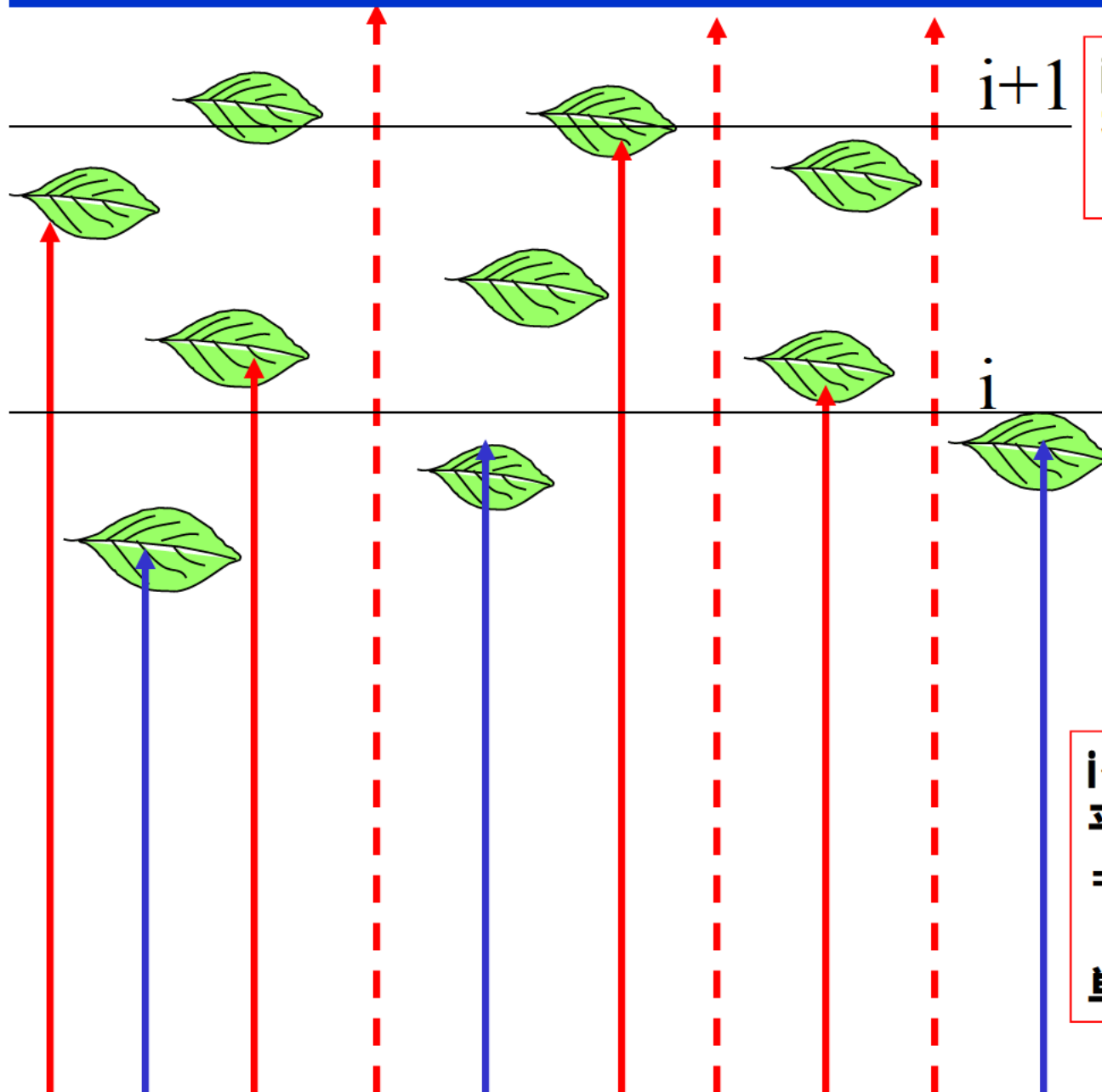
$$F = \ln \left(N_i / N_{i+1} \right)$$

この値を層の深さ $\Delta h = h_{i+1} - h_i$ で割った $F / \Delta h$ が、葉の枚数の空間密度 D である。葉の水平投影面積の空間密度 $[m^2/m^3]$ とみなされる。

$$F / \Delta h = D = \ln \left(N_i / N_{i+1} \right) / \Delta h$$

MH法による葉の空間密度の計算例

葉の高さデータからどうやって葉の空間密度を計算する？（測定回数が10回の場合）



$i+1$ までに葉のない
確率 = $(10 - 3 - 4) / 10$
= 0.3

i までに葉のない
確率 = $(10 - 3) / 10$
= 0.7



$i \sim i+1$ の間の空間の
平均葉密度
= $\ln(0.7 / 0.3) / (i+1 - i)$
= 0.84
単位：葉の数/m

さらに理解するために・・・

林床(地上高 $h_1=0$)から h_2 ($h_1 < h_2$)までに含まれる総葉数Fは

$$F = \int_0^{h_2} D(h) dh = - \int_0^{h_2} \frac{1}{\phi(h)} d\phi(h)$$

$$= - \int_0^{h_2} d[\ln(\phi(h))]]$$

$$= \ln \{ \phi(h=0) / \phi(h_2) \} .$$

$$= \ln (h=0までに葉のない確率 / h_2までに葉のない確率)$$

$h=0$ より下は地面なので, $h=0$ までに葉のない確率=1

$$= \ln (1 / h_2までに葉のない確率)$$

これをさらに $h=h_2$ と書き換えると,

$$F = \ln (1 / \phi(h))$$

すなわち, 高さ h までに葉がない確率は

$$\phi(h) = \exp(-F)$$

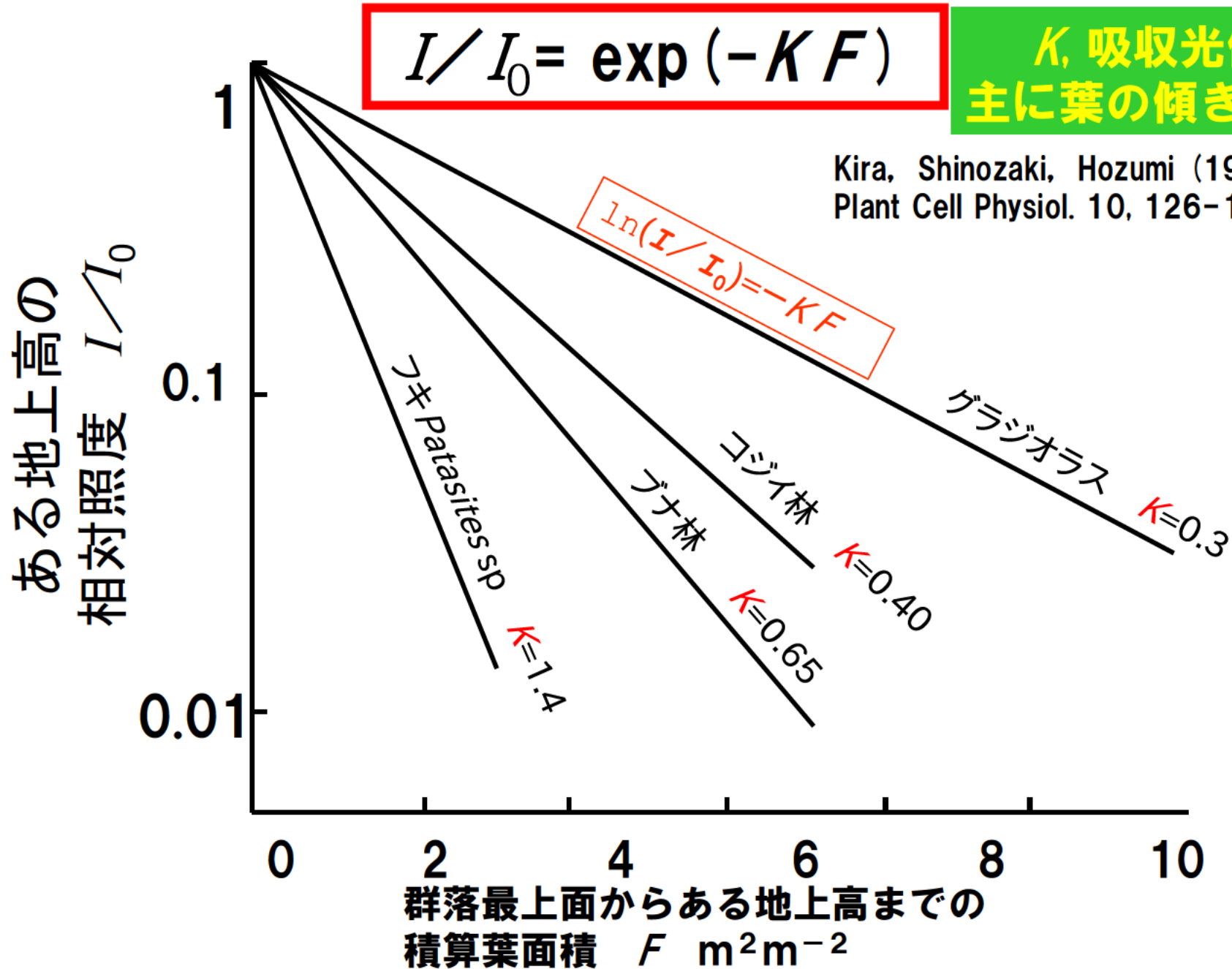
→ん, これはどこかで見たことがある!

Beer-Lambertの法則：さまざまな植物群落内での光の減衰

$$I/I_0 = \exp(-KF)$$

**K, 吸収光係数
主に葉の傾きに由来**

Kira, Shinozaki, Hozumi (1969)
Plant Cell Physiol. 10, 126-142より

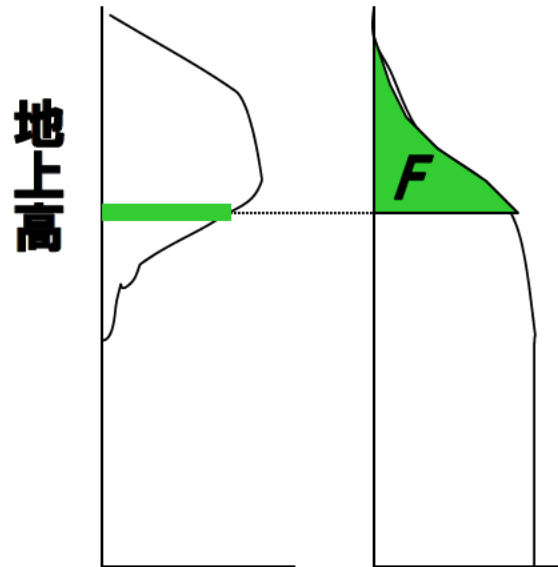
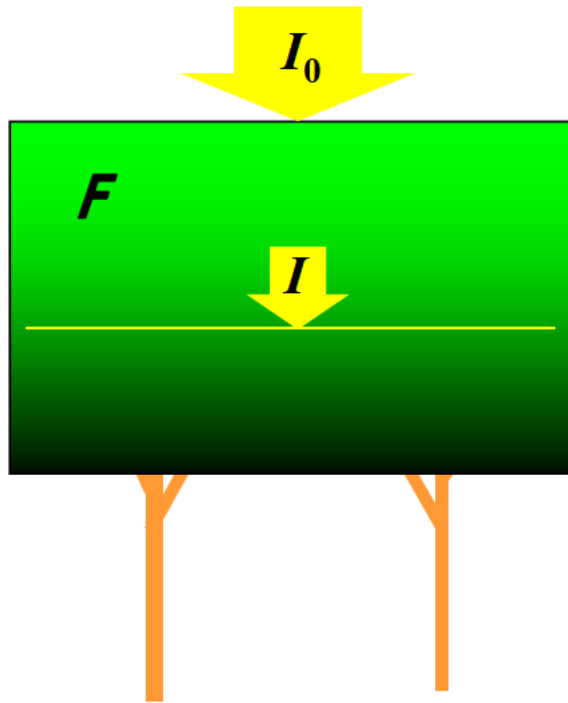


Beer-Lambert の法則とはなんだったか？

$$I / I_0 = \exp(-KF)$$

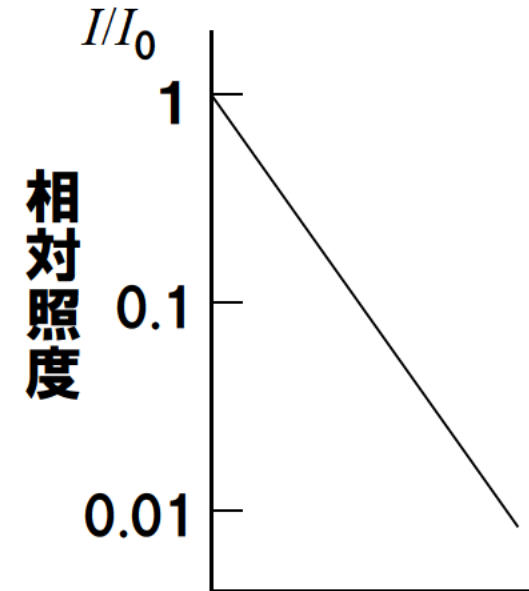
相対照度は群落の最上面から積算した葉面積 F の関数
(K :吸光係数)

グラフにするときは
 $\ln(I / I_0) = -KF$



葉面積密度
の垂直分布
[$m^2 m^{-3}$]

積算葉面積 F
[$m^2 m^{-2}$]

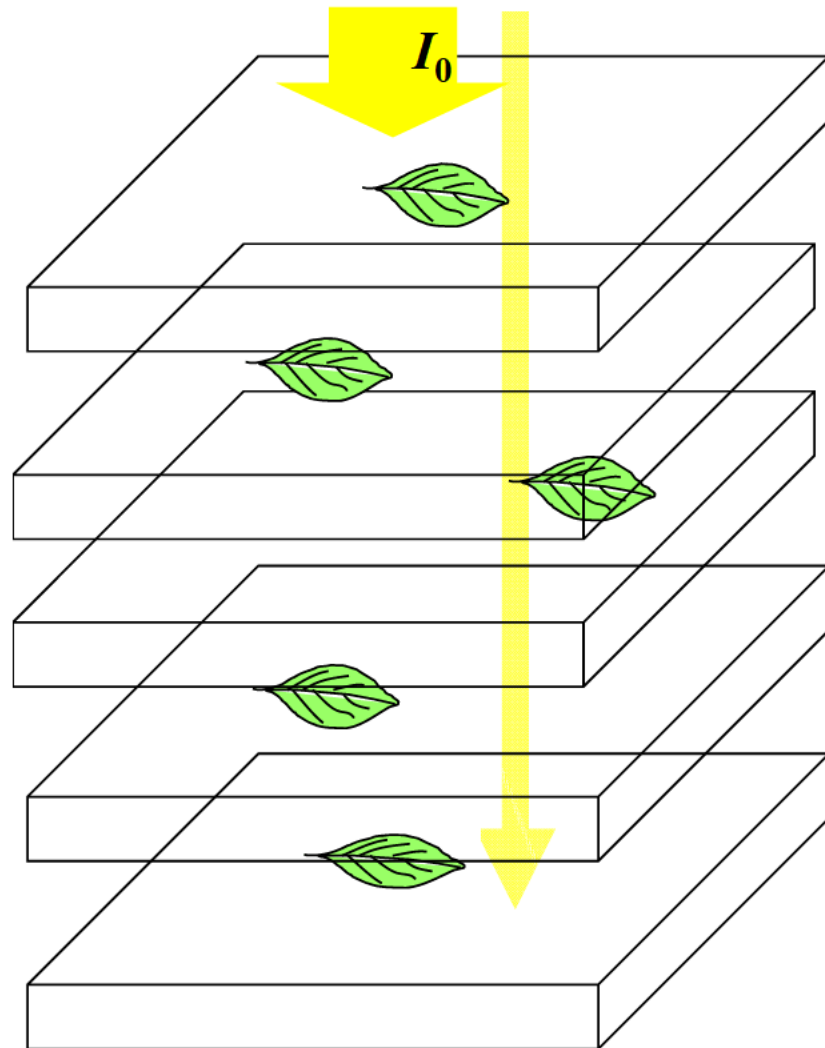


積算葉面積 F
[$m^2 m^{-2}$]

Monsi & Saeki (1953) が説明したBeer-Lambertの法則の導出

相対照度=上からきた光が各層を透過する確率

葉が水平的にランダムに分布している（ひとつの水平面内でランダムな位置をとる）と仮定すると



$$I / I_0 = (1-p)$$

$$I / I_0 = (1-p)^2$$

$$I / I_0 = (1-p)^3$$

.....

$$I / I_0 = (1-p)^n$$

$p \rightarrow 0$ のとき

(=葉が土地面積に比べて十分小さいとき)

$$I / I_0 = \exp(-F)$$

s , 個葉面積

S , 土地面積

$$p \equiv s/S$$

($s \ll S$)

n , 上から積算した葉数

I / I_0 , 相対照度

F , 土地面積あたりの総葉面積

$$(F = n s / S)$$

(解法は次ページ参照)

$I/I_0 = (1 - (s/S))^n$ で $s/S \rightarrow 0$ を計算しよう

簡単のため, $I/I_0 = y$, $s/S = p$ とおく.

一方定義 $F = n s/S$ より, $F = np$. よって, $n = F/p$,

$$y = (1 - p)^{F/p}$$

目標: $p \rightarrow 0$ のとき
 $I/I_0 = y = \exp(-F)$

ロピタルの定理を試してみる

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\lim_{p \rightarrow 0} (1 - p)^{F/p}$ を求める

$$(1 - p) = e^k$$

とおくと

$$k = \ln(1 - p)$$

よって

$$(1 - p)^{F/p} = (e^k)^{F/p} \\ = e^{F/p \ln(1-p)}$$

指数部分に着目すると, ロピタルの定理より

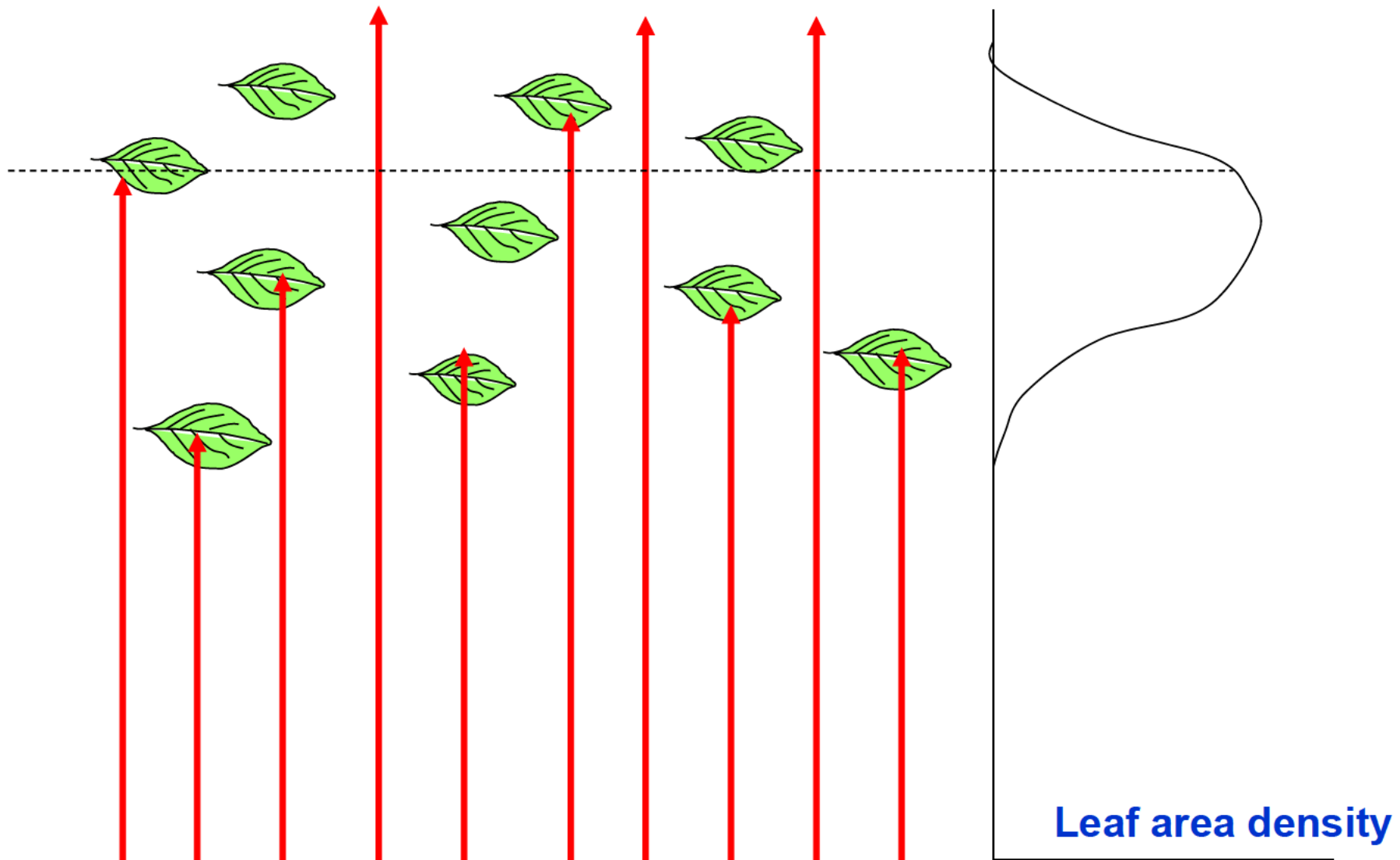
$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \ln(1 - p) \\ = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(\ln(1 - p))'}{p'} \\ = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-1/(1 - p)}{1} \\ = -1$$

よって

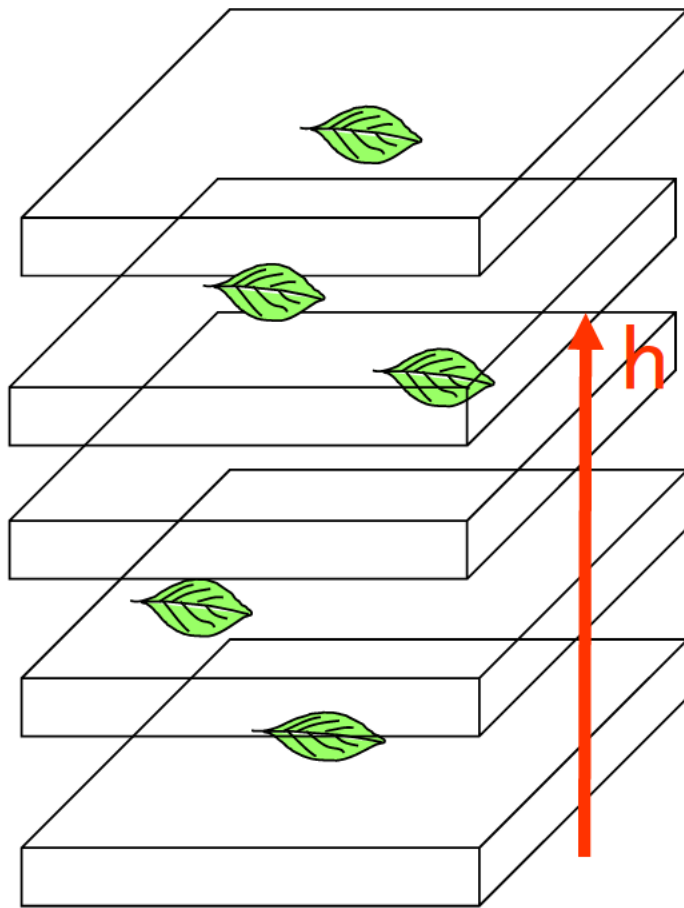
$$\lim_{p \rightarrow 0} e^{F/p \ln(1-p)} \\ = e^{-F}$$

一方, MacArthur & Hornやっていることは次のことと同じ・・・

ある高さ h までに葉がない確率 = h までにレーザーが届く確率



つまり、MacArthur & Hornで導かれた式は次のことと同じ・・・



ある高さ h までに葉がない確率 $\phi(h)$
 $= \exp(-F)$

= 下から当てた光が h まで届く確率
(F : h より下にある葉の総量)

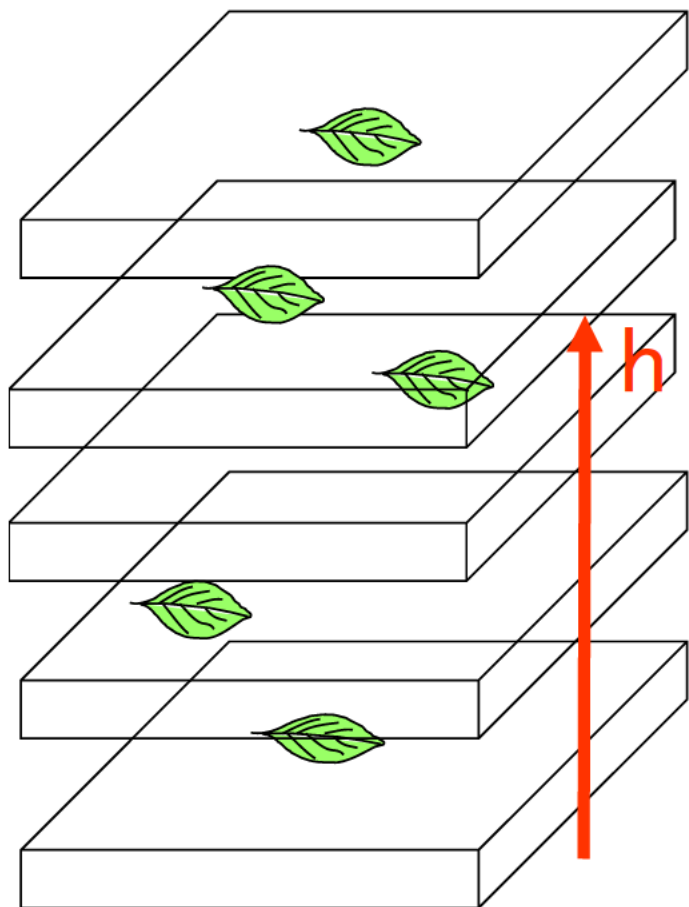
すなわち、相対照度 I/I_0 と群落上からの積算葉量 F との関係を示す Beer-Lambert の法則:

$$I/I_0 = \exp(-kF)$$

で、光が出る方向を下から上向きにして $k=1$ にしたのと同じ。

したがって、MH法で葉量垂直分布を推定するときの仮定は、Beer-Lambertの法則の仮定と同じことになる:

森林全体を、薄い層に切り分けたとき、各層の葉は上下の層の葉の位置に無関係に、水平面上でランダムな位置をとるように空間分布する。

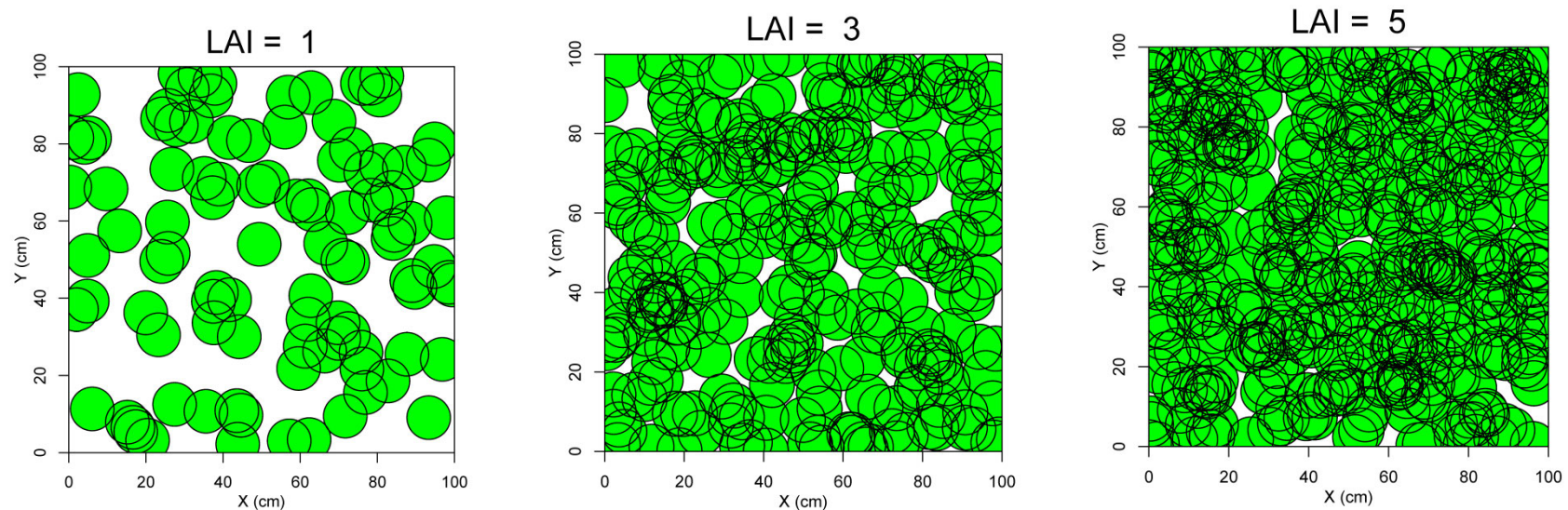


要するに
MacArthur & Horn (1969) の計算は,
Beer-Lambert の法則;

$$I/I_0 = \exp(-kF)$$

で、光が出る方向を下から上向き
にして $k=1$ にしたのと同じ。

MH法やBeer-Lambertの法則を使うと なぜ手前の葉に隠れて見えないはずの葉の面積までわかるのか？



正方形の区画にランダムに並べた葉の隙間

区画の1/100の大きさの個葉を100枚 (F=1) ~ 500枚 (F=5) 並べた。

- ・ 葉に覆われない部分の割合 = 光の透過割合 と考える

このとき、

ランダムに葉が散布しているということは、
葉に覆われない部分の割合 = 光の透過割合が $\exp(-F)$ となるように
葉と葉とが重なるように葉が散布していることに等しい。

この性質を利用して、隙間の部分の割合から葉の量を逆推定している、

- ランダムに葉が散布していることが前提になる。
- 必ずどこかに隙間があるはず。(隙間がないときは葉の量は無限大)

使用上の注意(1)

もしアロメトリー法などによる森林全体の葉量(LAIなど)がわからない場合、MH法だけでLAIを推定するにはどれだけレーザーを発射しなければならないか？

一定のレーザー発射数で測定できるLAIには限界がある

一定のレーザー発射数で測定できるLAIには限界がある

仮定

葉の水平投影面積の葉面積指数 LAI_S : $LAI_S = \ln(N_{total} / N_S)$

N_{total} : 発射したレーザーの数

N_S : 葉に当たらなかったレーザーの数 (sky hit)

一定のレーザー発射数 N_{total} で測定可能な LAI_S は

$N_S = 1$ としたときの N_{total}

Resolution (解像度) ≡ 一定の sky hit 数 N_S で計算される LAI_S と、
sky hit 数が 1 回増えたときに計算される LAI_S との差、と定義すると・・・

$$\text{Resolution} = \ln[(N_S + 1) / N_S]$$

すなわち、"解像度" は発射したレーザーの数に関係なく
葉に当たらなかったレーザーの数だけで決まる。

一定のレーザー発射数で測定できるLAIには限界がある

表の見方：発射したレーザーの数 (N_{total}) と葉に当たらなかったレーザーの数 (sky hitの数) (N_s) から計算される、葉の水平面投影面積のLAI (LAI_s) を読み取る。

- 個々の N_{total} に対する $N_s = 1$ のときの LAI_s が、その N_{total} で測定できる LAI_s の限界
- N_s のすぐ上の数値は、sky hit数が N_s のときのResolution (解像度)

Resolution	0.69	0.41	0.29	0.22	0.18	0.15	0.13	0.12	0.11	0.10
$N_{total} \backslash N_s$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
25	3.22	2.53	2.12	1.83	1.61	1.43	1.27	1.14	1.02	0.92
36	3.58	2.89	2.48	2.20	1.97	1.79	1.64	1.50	1.39	1.28
50	3.91	3.22	2.81	2.53	2.30	2.12	1.97	1.83	1.71	1.61
100	4.61	3.91	3.51	3.22	3.00	2.81	2.66	2.53	2.41	2.30
150	5.01	4.32	3.91	3.62	3.40	3.22	3.06	2.93	2.81	2.71
200	5.30	4.61	4.20	3.91	3.69	3.51	3.35	3.22	3.10	3.00
500	6.21	5.52	5.12	4.83	4.61	4.42	4.27	4.14	4.02	3.91
1000	6.91	6.21	5.81	5.52	5.30	5.12	4.96	4.83	4.71	4.61

一定のレーザー発射数で測定できるLAIには限界がある

表の見方：発射したレーザーの数 (N_{total}) と葉に当たらなかったレーザーの数 (sky hitの数) (N_s) から計算される、葉の水平面投影面積のLAI (LAI_s) を読み取る

- ・ 個々の N_{total} に対する $N_s = 1$ のときの
- ・ N_s のすぐ上の数値は、sky hit数が

例1) レーザー数 $N_{total} = 50$ で測定可能な水平面投影LAI (LAI_s) の最大値は、sky hitが1回だけのときで、そのとき $LAI_s = 3.91$ 。

しかしsky hitがあと1回あったときには LAI_s は3.22なので、3.91と3.22の間の LAI_s は測定できない。すなわち、sky hitが1回だけのときの解像度 = $3.91 - 3.22 = 0.69$ 。

Resolution		0.69	0.41	0.29							
		1			2	3					
N_{total}	N_s	1	2	3							
25		3.22	2.53								
36		3.58	2.59	2.48	2.53						
50		3.91	3.22	2.81	2.53	2.30	2.12	1.97	1.83	1.71	1.61
100		4.61	3.91	3.51	3.22	3.00	2.81	2.66	2.53	2.41	2.30
150		5.01	4.32	3.91	3.62	3.40	3.22	3.06	2.93	2.81	2.71
200		5.30	4.61	4.20	3.91	3.69	3.51	3.35	3.22	3.10	3.00
500		6.21	5.52	5.12	4.83	4.61	4.42	4.27	4.14	4.02	3.91
1000		6.91	6.21	5.81	5.52	5.30	5.12	4.96	4.83	4.71	4.61

一定のレーザー発射数で測定できるLAIには限界がある

表の見方：発射したレーザーの数 (N_{total}) と葉に当たらなかったレーザーの数 (sky hitの数) (N_s) から計算される、葉の水平面投影面積のLAI (LAI_s) を読み取る。

- 個々の N_{total} に対して
- N_s のすぐ上の数値

例2) 解像度 = 0.10 と決めたとき、かつ、予想される森林の水平面投影 $LAI_s = 3.0$ のときは、sky hit の数は 10 ぐらい必要で、それに必要なレーザーの測定数 $N_{total} = 200$

LAI_s の限界

Resolution 0.69											
		LAI_s の限界									
		N_s のすぐ上の数値									
		0.10									
		0.11									
		0.12									
		0.13									
		0.14									
		0.15									
		0.16									
		0.17									
		0.18									
		0.19									
		0.20									
		0.21									
		0.22									
		0.23									
		0.24									
		0.25									
		0.26									
		0.27									
		0.28									
		0.29									
		0.30									
		0.31									
		0.32									
		0.33									
		0.34									
		0.35									
		0.36									
		0.37									
		0.38									
		0.39									
		0.40									
		0.41									
		0.42									
		0.43									
		0.44									
		0.45									
		0.46									
		0.47									
		0.48									
		0.49									
		0.50									
		0.51									
		0.52									
		0.53									
		0.54									
		0.55									
		0.56									
		0.57									
		0.58									
		0.59									
		0.60									
		0.61									
		0.62									
		0.63									
		0.64									
		0.65									
		0.66									
		0.67									
		0.68									
		0.69									
		0.70									
		0.71									
		0.72									
		0.73									
		0.74									
		0.75									
		0.76									
		0.77									
		0.78									
		0.79									
		0.80									
		0.81									
		0.82									
		0.83									
		0.84									
		0.85									
		0.86									
		0.87									
		0.88									
		0.89									
		0.90									
		0.91									
		0.92									
		0.93									
		0.94									
		0.95									
		0.96									
		0.97									
		0.98									
		0.99									
		1.00									
		1.01									
		1.02									
		1.03									
		1.04									
		1.05									
		1.06									
		1.07									
		1.08									
		1.09									
		1.10									
		1.11									
		1.12									
		1.13									
		1.14									
		1.15									
		1.16									
		1.17									
		1.18									
		1.19									
		1.20									
		1.21									
		1.22									
		1.23									
		1.24									
		1.25									
		1.26									
		1.27									
		1.28									
		1.29									
		1.30									
		1.31									
		1.32									
		1.33									
		1.34									
		1.35									
		1.36									
		1.37									
		1.38									
		1.39									
		1.40									
		1.41									
		1.42									
		1.43									
		1.44									
		1.45									
		1.46									
		1.47									
		1.48									
		1.49									
		1.50									
		1.51									
		1.52									
		1.53									
		1.54									
		1.55									
		1.56									
		1.57									
		1.58									
		1.59									
		1.60									
		1.61									
		1.62									
		1.63									
		1.64									
		1.65									
		1.66									
		1.67									
		1.68									
		1.69									
		1.70									
		1.71									
		1.72									
		1.73									
		1.74									
		1.75									
		1.76									
		1.77									
		1.78									
		1.79									
		1.80									
		1.81									
		1.82									
		1.83									
		1.84									
		1.85									
		1.86									
		1.87									
		1.88									
		1.89									
		1.90									
		1.91									
		1.92									
		1.93									
		1.94									
		1.95									
		1.96									
		1.97									
		1.98									
		1.99									
		2.00									
		2.01									
		2.02									
		2.03									
		2.04									
		2.05									
		2.06									
		2.07									
		2.08									
		2.09									
		2.10									
		2.11									
		2.12									
		2.13									
		2.14									
		2.15									
		2.16									
		2.17									
		2.18									
		2.19									
		2.20									
		2.21									
		2.22									
		2.23									
		2.24									
		2.25									
		2.26									
		2.27									
		2.28									
		2.29									
		2.30									
		2.31									
		2.32									
		2.33									
		2.34									
		2.35									
		2.36									
		2.37									
		2.38									
		2.39									
		2.40									
		2.41									
		2.42									
		2.43									
		2.44									
		2.45									
		2.46									
		2.47									
		2.48									
		2.49									
		2.50									
		2.51									
		2.52									
		2.53									
		2.54									
		2.55									
		2.56									
		2.57									
		2.58									
		2.59									
		2.60									
		2.61									
		2.62									
		2.63									
		2.64									
		2.65									
		2.66									
		2.67									
		2.68									
		2.69									
		2.70									
		2.71									
		2.72									
		2.73									
		2.74									
		2.75									
		2.76									
		2.77									
		2.78									
		2.79									
		2.80									
		2.81									
		2.82									
		2.83									
		2.84									
		2.85									
		2.86									
		2.87									
		2.88									
		2.89									
		2.90									
		2.91									
		2.92									
		2.93									
		2.94									
		2.95									
		2.96									
		2.97									
		2.98									
		2.99									
		3.00									
		3.01									
		3.02									
		3.03									
		3.04									
		3.05									
		3.06									
		3.07									
		3.08									
		3.09									
		3.10									
		3.11									
		3.12									
		3.13									
		3.14									
		3.15									
		3.16									
		3.17									
		3.18									
		3.19									
		3.20									
		3.21									
		3.22									
		3.23									
		3.24									
		3.25									
		3.26									
		3.27									
		3.28									
		3.29									
		3.30									
		3.31									
		3.32									
		3.33									
		3.34									
		3.35									
		3.36									
		3.37									
		3.38									
		3.39									
		3.40									
		3.41									
		3.42									
		3.43									
		3.44									
		3.45									
		3.46									
		3.47									
		3.48									
		3.49									
		3.50									
		3.51									
		3.52									
		3.53									
		3.54									
		3.55									
		3.56									
		3.57									
		3.58									
		3.59									
		3.60									
		3.61									
		3.62									
		3.63									
		3.64									
		3.65									
		3.66									
		3.67									
		3.68									
		3.69									
		3.70									
		3.71									
		3.72									
		3.73									
		3.74									
		3.75									
		3.76									
		3.77									
		3.78									
		3.79									
		3.80									
		3.81									
		3.82									
		3.83									
		3.84									
		3.85									
		3.86									
		3.87									
		3.88									
		3.89									
		3.90									
		3.91									
		3.92									
		3.93									
		3.94									
		3.95									
		3.96									
		3.97									
		3.98									
		3.99									
		4.00									
25	N_s	3.22	2.53	2.12	1.83	1.61	1.43	1.28	1.14	1.02	0.92
36	N_s	3.58	2.89	2.48	2.20	1.97	1.79	1.61	1.50	1.39	1.28
50	N_s	3.91	3.22	2.81	2.53	2.30	2.12	1.97	1.85	1.71	1.61
100	N_s	4.61	3.91	3.51	3.22	3.00	2.81	2.66	2.53	2.41	2.30
150	N_s	5.01	4.32	3.91	3.62	3.40	3.22	3.06	2.93	2.81	2.71
200	N_s	5.30	4.61	4.20	3.91	3.69	3.51	3.35	3.22	3.10	3.00
500	N_s	6.21	5.52	5.12	4.83	4.61	4.42	4.27	4.14	4.02	3.91
1000	N_s	6.91	6.21	5.81	5.52	5.30					